



Prof. Dr. H.-D. Donder

Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011

21. November 2010

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Übungsblatt 5

Aufgabe 1: Sei $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0 \text{ und } x + y \leq 1\}$. Bestimmen Sie

$$\int_A (x^2 + y^2) d(x, y).$$

Aufgabe 2: Sei

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq x^3, 0 \leq z \leq 4\}.$$

Bestimmen Sie das Volumen von B .

Aufgabe 3: Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = 1 - |x| - |y|$ und $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) > 0\}$. Bestimmen Sie

$$\int_C f d(x, y)$$

Aufgabe 4: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Regelfunktion, und sei $G = \{(x, f(x)) \mid a \leq x \leq b\}$ der Graph von f . Zeigen Sie, dass G eine Nullmenge ist.

Abgabe bis spätestens 11:30 Uhr am 29. November 2010 im Übungskasten.



Andreas Fackler

29. November 2010

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 5

Aufgabe 1: A ist der Durchschnitt des kompakten Quaders $[0, 1] \times [0, 1]$ mit dem Urbild von $(-\infty, 1]$ unter der stetigen Funktion $x + y$, also abgeschlossen und beschränkt. Damit ist A kompakt.

$x^2 + y^2$ ist stetig, also ist die Funktion über A integrierbar. Für jedes $y \in [0, 1]$ ist $A_y = [0, 1 - y]$ (und für alle anderen y ist $A_y = \emptyset$). Es folgt:

$$\begin{aligned}\int_A (x^2 + y^2) d(x, y) &= \int_0^1 \int_0^{1-y} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 \right) \Big|_0^{1-y} dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{(1-y)^3}{3} + (1-y)y^2 \right) dy = -\frac{(1-y)^4}{12} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

Aufgabe 2: B ist der Durchschnitt des kompakten Quaders $[1, 2] \times [1, 8] \times [0, 4]$ mit den Urbildern von $[0, \infty)$ unter den stetigen Funktionen $x^3 - y$ und $y - x^2$, also abgeschlossen und beschränkt und damit kompakt. Folglich ist B integrierbar. Für alle $x \in [1, 2]$ und $z \in [0, 4]$ ist $(B_z)_x = [x^2, x^3]$ (und für alle anderen x und z ist es leer). Wir erhalten also:

$$\begin{aligned}v(B) &= \int_0^4 v(B_z) dz = \int_0^4 \int_1^2 v((B_z)_x) dx dz = \int_0^4 \int_1^2 v([x^2, x^3]) dx dz \\ &= \int_0^4 \int_1^2 (x^3 - x^2) dx dz = \int_0^4 \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 dz \\ &= \int_0^4 \left(\frac{16-1}{4} - \frac{8-1}{3} \right) dz = 15 - \frac{4 \cdot 7}{3} = \frac{17}{3}\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Da f stetig ist, ist $C = f^{-1}((0, \infty))$ offen. Außerdem folgt aus $(x, y) \in C$, dass $|x|, |y| < 1$, also ist C beschränkt. Damit ist f über C integrierbar. Für $y \in (-1, 1)$ ist

$C_y = (|y| - 1, 1 - |y|)$ (sonst leer). Es folgt:

$$\begin{aligned}
\int_C f d(x, y) &= \int_{-1}^1 \int_{C_y} f dx dy = \int_{-1}^1 \int_{|y|-1}^{1-|y|} (1 - |x| - |y|) dx dy \\
&= \int_{-1}^1 \left(x(1 - |y|) - \frac{x \cdot |x|}{2} \right) \Big|_{|y|-1}^{1-|y|} dy = \int_{-1}^1 (2(1 - |y|)^2 - (1 - |y|)^2) dy \\
&= \int_{-1}^1 (1 - |y|)^2 dy = \int_{-1}^0 (1 + y)^2 dy + \int_0^1 (1 - y)^2 dy \\
&= \frac{(1 + y)^3}{3} \Big|_{-1}^0 - \frac{(1 - y)^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass $x \cdot |x|$ differenzierbar ist mit Ableitung $2|x|$. Außerdem haben wir benutzt, dass $\int_{(a,b)} f dx = \int_{[a,b]} f dx = \int_a^b f dx$, da $\{a, b\}$ eine Nullmenge ist.

Aufgabe 4: Sei $\varepsilon > 0$ und sei $\varphi = \sum_{k=1}^m c_k \cdot \mathbf{1}_{Q_k}$ eine Treppenfunktion auf $[a, b]$ mit $\|\varphi - f\|_{\sup} < \frac{\varepsilon}{2}$, und sei die Darstellung so gewählt, dass die Intervalle Q_k disjunkt sind und ihre Vereinigung $[a, b]$ ist. Dann ist $\sum_{k=1}^m v(Q_k) = b - a$, und für $x \in Q_k$ ist jeweils $c_k - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < c_k + \frac{\varepsilon}{2}$. Also ist G eine Teilmenge von

$$A := \bigcup_{k=1}^m Q_k \times \left[c_k - \frac{\varepsilon}{2}, c_k + \frac{\varepsilon}{2} \right],$$

und insbesondere:

$$\|\mathbf{1}_G\|_1 \leq \|\mathbf{1}_A\|_1 = v(A) = \sum_{k=1}^m v(Q_k) \cdot \varepsilon = (b - a) \cdot \varepsilon$$

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $\|\mathbf{1}_G\|_1 = 0$. Damit ist G integrierbar mit Volumen 0.